Ejercicio: En el espacio vectorial de los polinomios $P_2(\mathbb{R})$ consideramos el subespacio W generado por $S = \{x + x^2, 2x^2, x - 3x^2\}$. Calcular una base, la dimensión y las ecuaciones de W.

$W = L(S)$

$S = \{x + x^2, 2x^2, x - 3x^2\}$

$B_c = \{1, x, x^2\}$

$$\left.\begin{array}{r} x + x^2 \equiv (0, 1, 1) \\ 2x^2 \equiv (0, 0, 2) \\ x - 3x^2 \equiv (0, 1, -3) \end{array}\right\} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$B_W = \{x + x^2, 2x^2\}$

$rg(A) = 2$

$\dim W = 2$

$a + bx + cx^2 \equiv (a, b, c)$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 0 \\ b = \alpha \\ c = \alpha + 2\beta \end{array}\right\} \text{Ec. param.}$$

nº ec. implícitas $= \dim P_2(\mathbb{R}) - \dim(W)$

$= 3 - 2 = 1$ $\quad \boxed{a = 0}$ Ec. implícita.

Sea U = {a + bx + cx^2 / a + b = 2c} el subconjunto de P_2 (ℝ). Comprobar que es un subespacio vectorial y calcular base y dimensión de U. ¿Son W y U dos subespacios isomorfos? Razonar la respuesta.

Dado un espacio vectorial $(V, +, \cdot_{\mathbb{K}})$ sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto no vacío $U \subseteq V$ es un <u>subespacio vectorial</u> de V si verifica:

1. $\forall u_1, u_2 \in U$, $u_1 + u_2 \in U$
2. $\forall u_1 \in U$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha u_1 \in U$

es decir, U es cerrado para la suma y el producto por escalares.

<u>CARACTERIZACIÓN</u>

$\emptyset \neq U \subseteq V$ es un subespacio vectorial si y sólo si $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall u_1, u_2 \in U$ se tiene que $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$.

$$\left.\begin{array}{l} p_1(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 \\ p_2(x) = a_2 + b_2 x + c_2 x^2 \end{array}\right\} \in U \qquad \boxed{\begin{array}{l} a_1 + b_1 = 2c_1 \\ a_2 + b_2 = 2c_2 \end{array}}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha p_1(x) + \beta p_2(x) = \alpha(a_1 + b_1 x + c_1 x^2) + \beta(a_2 + b_2 x + c_2 x^2) =$$

$$= (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2)x + (\alpha c_1 + \beta c_2)x^2 \overset{?}{\in} U$$

$$(\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2) = \alpha \underbrace{(a_1 + b_1)}_{2c_1} + \beta \underbrace{(a_2 + b_2)}_{2c_2} =$$
$$= 2(\alpha c_1 + \beta c_2) \checkmark$$

$a + b - 2c = 0$ Ec. implícita.

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = \dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{2}\beta \end{array}\right\} \text{Ec. param.}$$

$B_{\mathcal{U}} = \{(1, 0, \frac{1}{2}), (0, 1, \frac{1}{2})\} = \{1 + \frac{1}{2}x^2, x + \frac{1}{2}x^2\}$

$\dim \mathcal{U} = 2$

$\dim W = \dim \mathcal{U} = 2 \implies \exists$ isomorfismo entre ellos

$B_W = \{x + x^2, 2x^2\}$

$B_{\mathcal{U}} = \{1 + \frac{1}{2}x^2, x + \frac{1}{2}x^2\}$

$f: W \longrightarrow \mathcal{U}$

$f(x + x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2$

$f(2x^2) = x + \frac{1}{2}x^2$

La matriz asociada a f respecto de B_W y $B_{\mathcal{U}}$ es la identidad

$$A = M_{B_W, B_{\mathcal{U}}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A es cuadrada y $rg(A) = 2 \implies f$ es isomorfismo (biyectiva).